NATIONS UNIES
INSTITUT AFRICAIN
DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE
ET DE PLANIFICATION
DAKAR

IDEP/ET/XXXIII/356

M. Bastiani

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

Sommaire des cours.

Cours I - Vecteurs lignes et vecteurs colonnes - Produit de deux vecteurs - Définition des matrices - Produit d'une matrice par un vecteur - Addition et multiplication de matrices - Autres définitions sur les matrices.

Cours II - Inverse d'une matrice carrée - Déterminants - Application à la résolution d'équations linéaires - Rang d'une matrice quelconque.

Cours III - Notion d'espace vectoriel - Distance de deux points dans un espace vectoriel - Expression du cosinus de deux vecteurs - Variétés linéaires dans un espace vectoriel à T dimensions - Notions sur les ensembles convexes.

Cours IV - Notion sur les fonctions linéaires - Maximum et minimum de fonctions linéaires.

Cours V - Dérivées partielles et différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables - Extrêmum d'une fonction de variables indépendantes - Extrêmum d'une fonction de deux variables liées - Extrêmum d'une fonction de trois variables liées - Cas général : Multiplicateurs de LAGRANGE.

EXERCICES.

Ouvrages à consulter :

1) Cours de Mathématiques de Licence-ès-Sciences économiques (Paris)
   2ème année : GIRAULT
   3ème année : GUILBAUT
2) Algèbre moderne et Activités humaines : KEMENY, SNELL, THOMPSON.
3) Eléments d'Algèbre moderne : LENTIN et RIVAUD.
4) Mathématiques de HOCQUENGHEM et JAFFARD (Conservatoire National des Arts et Métiers).

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

COURS I.

VECTEURS LIGNES ET VECTEURS COLONNES - PRODUIT DE DEUX VECTEURS - DEFINITION DES MATRICES - PRODUIT D'UNE MATRICE PAR UN VECTEUR - ADDITION ET MULTIPLICATION DE MATRICES.

I - 1 - Vecteurs lignes et vecteurs colonnes.

I - 1 - 1 - Définition.

Un vecteur ligne est une liste de nombres rangés l'un à côté de l'autre. Les nombres contenus dans le vecteur-ligne sont les composantes ou coordonnées du vecteur. Leur nombre caractérise le vecteur : on distinguera ainsi des vecteurs lignes à 3, 4 ... n coordonnées ou éléments ou encore composantes.

Les nombres-éléments peuvent faire partie des ensembles N, Z, Q, R, C respectivement nombres naturels, nombres entiers relatifs, nombres fractionnaires, nombres réels, nombres complexes.

Exemples de vecteurs-lignes

à 3 composantes $(3, 7, 9)$

à 3 composantes $(3, - 7, 9)$

à 4 composantes $(2/3, 1/4, - 1/7, 4)$

à 5 composantes $(\pi, \sqrt{e}, 9, 1/4, - \sqrt[3]{- 2})$

à 5 composantes $(3 + 2i, \sqrt{e} + 3i\pi, 1/4 - i/5, 19, - 2/7)$

On définit de même un vecteur-colonne comme une liste de nombres rangés l'un au-dessous de l'autre

Exemples de vecteurs colonnes

à 1 composante (e)

$$\begin{pmatrix} \pi \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

à 3 composantes

$$\begin{pmatrix} 3i + 2 \\ 7 \\ \sqrt{\pi} \quad 5/3 \\ 9 \\ 12 \\ - 2 \end{pmatrix}$$

à 6 composantes

I - 1 - 2 - Egalité de deux vecteurs lignes ou de deux vecteurs colonnes

Deux vecteurs lignes ou deux vecteurs colonnes sont égaux si leurs composantes respectives dans chacun d'eux sont égales.

Exemple : $(1, 3, -4, 0) = (2/2, 6/2, -16/4, 0)$

I - 1 - 3 - Addition de deux vecteurs lignes ou de deux vecteurs colonnes.

Remarque : On ne peut additionner que deux vecteurs lignes (ou colonnes) ayant le même nombre de composantes.

La somme de deux vecteurs lignes (ou colonnes) à n composantes est un vecteur ligne (ou colonne) à n composantes. Chaque composante du vecteur somme s'obtient en ajoutant les composantes du même rang des deux vecteurs initiaux.

Exemples : $(4, 7, -3) + (2\pi, -\sqrt{2}, 1/4) = (4 + 2\pi, 7 - \sqrt{2}, 1/4 - 3)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ e \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7 + e \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On définit sans difficulté la somme de plusieurs vecteurs lignes ou vecteurs colonnes.

Propriétés : L'addition est commutative et associative.

I - 1 - 4 - Produit d'un vecteur ligne ou d'un vecteur colonne par un scalaire.

La multiplication d'un vecteur ligne (ou colonne) par un scalaire K (nombre quelconque) définit un vecteur ligne (ou colonne) ayant le même nombre de composantes, chacune d'elles s'obtenant en multipliant par K la composante homologue du vecteur initial.

Exemple

$$1/3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ \pi \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ \pi/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conséquence : Si u est un vecteur quelconque, son opposé $-u$ s'obtient en faisant le produit de (-1) par u.

Exemple

$(2, 7, -4, -8/7)$ a pour opposé $(-2, -7, 4, 8/7)$

I - 1 - 5 - Soustraction de deux vecteurs lignes ou de deux vecteurs colonnes.

Pour soustraire deux vecteurs lignes (ou colonnes), il suffit d'ajouter au premier le vecteur opposé du second.

Dans ce cas également, les deux vecteurs devront avoir le même nombre de composantes.

Exemple : $(3, 7, -4) - (2, 1/2, 9) = (1, 13/2, -13)$

I - 1 - 6 - Vecteurs nuls.

On appelle vecteur nul un vecteur ligne ou un vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles.

Exemple : $(0, 0, 0, 0)$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Propriété : Si u est un vecteur quelconque et 0 un vecteur nul ayant le même nombre de composantes $\quad u + 0 = 0$

I - 1 - 7 - Avantages de la notation vectorielle.

Grâce à la notation vectorielle, on pourra désigner une collection de nombres par une seule lettre. Par exemple remplacer par x le vecteur ligne $(x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \; \dots \; x_n)$ à n composantes. On opèrera sur cette collection comme s'il s'agissait d'une seule quantité : toutes les opérations où interviendraient $x_1 \;\; x_2 \dots x_n$ seront ainsi remplacées par des opérations analogues où ne figurera que x.

I - 2 - Produit de deux vecteurs.

I - 2 - 1 - Intérêt du produit de deux vecteurs.

L'opération produit de deux vecteurs permet la combinaison simultanée de deux grandeurs représentées par ces vecteurs : par exemple prix et quantités.

Les vecteurs seront l'un un vecteur ligne, l'autre un vecteur colonne de mêmes composantes.

I - 2 - 2 - Définition du produit de deux vecteurs.

Soient u un vecteur ligne et V un vecteur colonne ayant tous deux le même nombre n de composantes $u_1 \dots u_n$ et $V_1 \dots V_n$. Le produit $u.V$ est défini par l'expression :

$u_1 \;\; V_1 \;\; + \;\; u_2 \;\; V_2 \;\; + \;\; \dots + u_n \; V_n$. Cette expression est un scalaire.

I - 2 - 3 - Produit scalaire de deux vecteurs.

A - Dans le plan à deux dimensions R^2 - soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de ce plan.

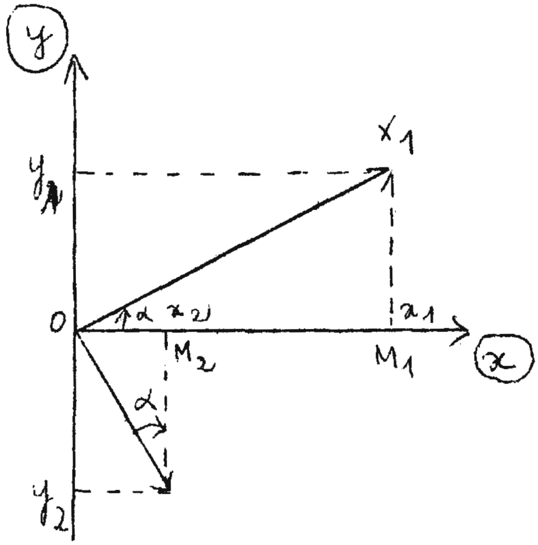
On appelle vecteur transposé de X_1, le vecteur ligne $X_1' = (x_1 \; y_1)$

Et le produit scalaire de deux vecteurs X_1 et X_2 n'est autre que le produit des vecteurs : $X_1' \cdot X_2 = (x_1 \; y_1) \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \, x_2 + y_1 \, y_2$

On utilise les notions équivalentes suivantes :

$$X_1' \cdot X_2 = X_2' \cdot X_1 = \langle X_1, X_2 \rangle = \langle X_2, X_1 \rangle = x_1 \, x_2 + y_1 \, y_2$$

Propriété fondamentale : Si $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ les vecteurs X_1 et X_2 du plan R^2 sont orthogonaux.



$x_1 \, x_2 + y_1 \, y_2 = 0$ peut s'écrire

$$\frac{x_1}{y_1} = - \frac{y_2}{x_2}$$

Soit : $\dfrac{\overline{OM_1}}{\overline{M_1 X_1}} = \dfrac{\overline{M_2 X_2}}{\overline{M_2 O}}$

les triangles rectangles $OX_1 \, M_1$ et $O \, X_2 \, M_2$ sont semblables. OX_1 est donc perpendicumaire à OX_2 .

B - Dans le plan à T dimensions R^T - soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_T \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_T \end{pmatrix}$ deux vecteurs à T composantes, on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par :

$$X' \cdot Y = Y' \cdot X = \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle = \sum_{1}^{T} x_i \, y_i$$

Par analogie avec le cas du plan, on dira que X et Y sont orthogonaux quand leur produit scalaire est nul.

Autres propriétés du produit scalaire :

$$1 - \quad \langle X_1, X_2 + X_3 \rangle = \langle X_1, X_2 \rangle + \langle X_1, X_3 \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot X_1, X_2 \rangle = \lambda \cdot \langle X_1, X_2 \rangle$$

Nota : Dans le produit de deux vecteurs, on écrit toujours le vecteur ligne en premier et le vecteur colonne en second.

I - 2 - 4 - Application

Soit $x = (x_1, x_2)$ et $a = \binom{3}{4}$ $b = \binom{2}{3}$. Déterminer x_1 et x_2 sachant que

$$x\,a = -1$$
$$x\,b = 7$$

On :a : $x\,a = 3\,x_1 + 4\,x_2$

$x\,b = 2\,x_1 + 3\,x_2$

Il faut résoudre le système

$$3\,x_1 + 4\,x_2 = -1$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 7$$

D'où : $\begin{cases} x_1 = -31 \\ x_2 = 23 \end{cases}$

I - 3 - Définition des matrices.

Une matrice est un ensemble de nombres disposés en rectangle

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Les nombres a_{ij} sont les éléments de la matrice qui contient m lignes et n colonnes. La matrice $[A]$ est de la forme : m x n. Elle possède m x n éléments.

Si m = n la matrice est dite <u>carrée d'ordre m</u>

Exemples :

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 & \sqrt{\pi} & 1/3 & 2 \\ 0 & 2 & 7/9 & 4{,}2 & 0 & 1 \\ -e & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ est une matrice de la forme 3 x 6

le vecteur ligne (1, 2, 4) est une matrice de la forme 1 x 3

le vecteur colonne $\binom{3}{2}$ est une matrice de la forme 2 x 1

Egalité de deux matrices : Deux matrices de même forme (donc ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes) sont égales si et seulement si leurs éléments correspondants sont égaux.

Ecrire : $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ revient à écrire :

$$\begin{cases} a_1 = 3 & b_1 = 1 & c_1 = 4 \\ a_2 = 2 & b_2 = 7 & c_2 = 8 \\ a_3 = 0 & b_3 = 1 & c_3 = 2 \end{cases}$$

Remarque : les deux matrices ci-dessus sont carrées de forme 3 x 3.

I - 4 - Produit d'une matrice par un vecteur.

I - 4 - 1 - Produit d'une matrice par un vecteur colonne

La matrice est de forme m x n, le vecteur colonne doit être de forme n x 1 (il possède n éléments). Désignons la matrice par $[A]$ et le vecteur colonne par u. Le produit $[A]$. u par définition sera un vecteur colonne à m éléments, chaque élément étant obtenu en multipliant les composantes d'une ligne quelconque de la matrice $[A]$ par les composantes correspondantes du vecteur u et en ajoutant les différents produits. Dans le cas le plus général on aura :

$$[A].u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_K \\ \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\,u_1 + a_{12}\,u_2 + \cdots + a_{1n}\,u_n \\ a_{21}\,u_1 + a_{22}\,u_2 + \cdots + a_{2n}\,u_n \\ \vdots \\ a_{i1}\,u_1 + a_{i2}\,u_2 + \cdots + a_{in}\,u_n \\ a_{m1}\,u_1 + a_{m2}\,u_2 + \cdots + a_{mn}\,u_n \end{bmatrix}$$

On aura toujours dans l'ordre $[A]$ et u au moment d'effectuer l'opération du produit.

I - 4 - 2 - Produit d'un vecteur ligne par une matrice

On définit de façon analogue le produit $V . [A]$ d'un vecteur ligne à m éléments par une matrice de forme m x n. Le vecteur ligne sera de forme 1 x m. On aura :

$$V . [A] = (V_1 \quad V_2 \cdots V_p \cdots V_m) \times \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\left(\sum_1^m V_p\, a_{p1} \quad , \quad \sum_1^m V_p\, a_{p2} \cdots \sum_1^m V_p\, a_{pn} \right)$$

Le produit $V \cdot [A]$ sera un vecteur ligne à n éléments, chaque élément étant obtenu en multipliant les composantes d'une colonne quelconque de la matrice $[A]$ par les composantes correspondantes du vecteur V et en ajoutant les différents produits.

I - 4 - 3 - Exemples :

(1)
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 3 \\ 1 \times 2 + 0 \times 3 + 4 \times 3 \\ 5 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 3 \\ 4 \times 2 + 1 \times 3 + 4 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ 22 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Forme 4 x 3 — Forme 3 x 1 — Forme 4 x 1

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 3 + 4 \times 2 + 2 \times 3 \\ 1 \times 2 + 3 \times 1 + 5 \times 5 + 4 \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 34 \end{pmatrix}$$

Forme 1 x 5 — Forme 5 x 2 — Forme 1 x 2

I - 5 - Addition et produit de matrices.

I - 5 - 1 - Addition de matrices de même forme

a) L'addition ou somme de deux matrices de même forme donne pour résultat une matrice de même forme, chaque composante de la matrice somme étant égale à la somme des composantes correspondantes des deux matrices initiales.

Exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 2 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

b) L'addition de plusieurs matrices de même forme se définit de façon évidente à partir de l'addition de deux matrices. Cette opération est associative et commutative.

I - 5 - 2 - Produit d'une matrice par un scalaire.

Si $[A]$ est une matrice de forme m x n et K un scalaire quelconque, le produit K . $[A]$ est une matrice de forme m x n dont chaque composante est égale au produit par K de la composante correspondante de A.

Exemple

$$0{,}7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 1{,}4 & 2{,}1 \\ 1{,}4 & 0{,}7 & 2{,}8 \end{bmatrix}$$

I - 5 - 3 - Produit de plusieurs matrices.

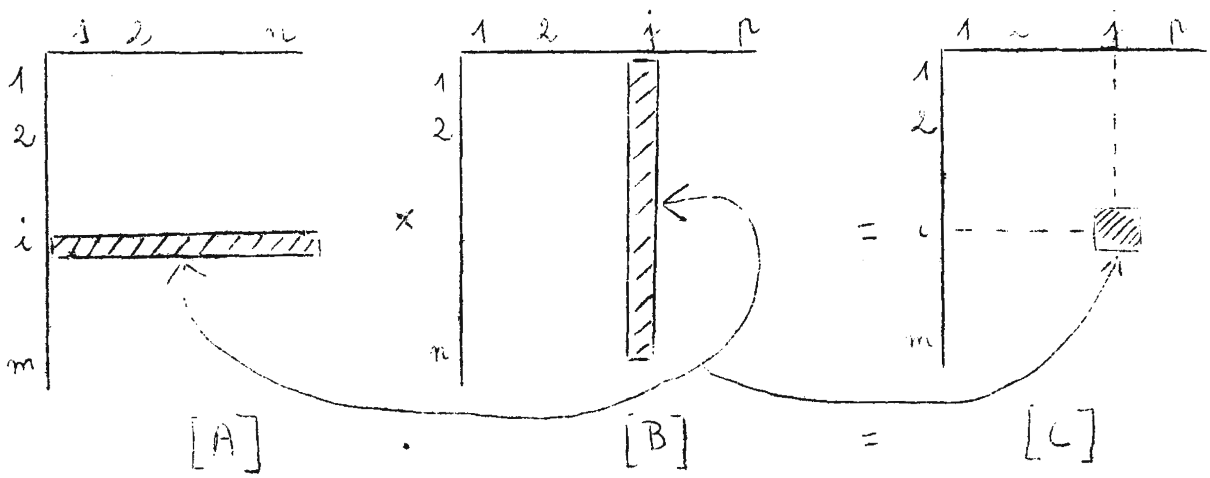
a) Cas de deux matrices - Le produit d'une matrice $[A]$ par une matrice $[B]$ implique la condition suivante :

Si $[A]$ a pour forme m x n, $[B]$ aura pour forme n x x, x pouvant être un nombre naturel quelconque. Donc : $[B]$ doit avoir autant de lignes que $[A]$ a de colonnes.

Si cette condition est remplie, $[A]$ étant une matrice de forme m x n et $[B]$ une matrice de forme n x p, le produit $[A]$ par $[B]$ sera une matrice $[C]$ de forme m x p et de composante générale

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

égale au produit du vecteur ligne de $[A]$ ayant le rang i par le vecteur colonne de $[B]$ ayant le rang j.



Exemple : $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

forme 2x3 forme 3x4 forme 2x4

b) Le cas de plusieurs matrices. Soit $[A]$ une matrice de forme m x n, $[B]$ une matrice de forme n x p, $[C]$ une matrice de forme p x q, $[D]$ une matrice de forme q x r. On a vu que

le produit $[A] . [B]$ est une matrice de forme m x p soit $[M_1]$
le produit $[M_1] . [C]$ est une matrice de forme m x q soit $[M_2]$
le produit $[M_2] . [D]$ est une matrice de forme m x r soit $[M]$

On peut écrire :

$$[A] . [B] . [C] . [D] = \underbrace{[A.B]}_{M_1} . [C] . [D] = \underbrace{[A.B.C]}_{M_2} . [D]$$

La multiplication de plusieurs matrices est associative.

Mais en général la multiplication ne saurait être commutative.

c) Cas des matrices carrées. Si $[A]$ et $[B]$ sont deux matrices carrées de même forme, on peut effectuer les produits : $[A] \times [B]$ et $[B] \times [A]$

Mais en général $[A] \times [B]$ sera différent de $[B] \times [A]$

Exemple : $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$[A] \times [B] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[B] \times [A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[A] \times [B]$ est différent de $[B] \times [A]$

I - 6 - Autres définitions sur les matrices.

I - 6 - 1 - Matrices diagonales.

On appelle matrice diagonale une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls à l'exception des éléments diagonaux (éléments qui ont les mêmes numéros de ligne et de colonne). Une telle matrice sera en général notée : $[\hat{A}]$

Exemple : $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

I - 6 - 2 - Matrices identité.

On appelle matrice identité une matrice diagonale dont chaque élément diagonal est égal à 1. Une telle matrice est notée : $[I]$

Exemple
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] \text{ d'ordre } 4$$

Propriété : Si $[A]$ est une matrice carrée d'ordre m et $[I]$ la matrice identité d'ordre m, on a :

$$[A] \cdot [I] = [I] \cdot [A] = [A]$$

La matrice identité joue le même rôle que le nombre 1 pour les produits de nombres. $[I]$ est donc un élément neutre du produit de plusieurs matrices.

I - 6 - 3 - Matrices zéro.

On appelle matrice zéro une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls. Une telle matrice est notée $[0]$. Exemple $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0]$ d'ordre 2

Propriété : Si $[A]$ est une matrice carrée d'ordre m et $[0]$ la matrice zéro d'ordre m, on a

$$[A] + [0] = [0] + [A] = [A]$$

La matrice joue le même rôle que zéro pour les sommes de nombres. $[0]$ est donc un élément neutre de l'addition de plusieurs matrices.

Remarque : Le produit de deux matrices non nulles peut donner la matrice zéro.

Exemple : $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $[A] \cdot [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Dans ce cas, on dit que les matrices $[A]$ et $[B]$ sont des diviseurs de zéro.

I - 6 - 4 - Puissances d'une matrice carrée.

Si $[A]$ est une matrice carrée d'ordre m, on définit successivement

$[A^2]$ comme étant égale au produit $[A] \times [A]$

$[A^3]$ " " " " " $[A] \times [A] \times [A]$

$[A^q]$ " " " " " $[A] \times \dots . [A]$ (q facteurs)

Ces différentes matrices (toutes d'ordre m) sont les puissances de la matrices $[A]$

Cas particulier :

a) $[I^2] = [I^3] = [I^q] = [I]$ (d'ordre m)

b) $[0^2] = [0^3] = [0^q] = [0]$ (d'ordre m)

I - 6 - 5 - Transposée d'une matrice.

On appelle transposée d'une matrice $[A]$, la matrice $[A']$, obtenue en interchangeant lignes et colonnes. Le terme général a_{ij} de la matrice $[A]$ est donc identique au terme a'_{ji} de la matrice transposée $[A']$

Exemple :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad [A'] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Remarque : Si $[A]$ est de forme m x n , $[A']$ sera de forme n x m.
D'autre part, on démontre que la transposée du produit de plusieurs matrices prises dans un certain ordre est égale au produit des transposées de ces matrices prises dans l'ordre inverse : $([A] . [B] . [C])' = ([C'] . [B'] . [A'])$.

I - 6 - 6 - Matrices symétriques.

Une matrice carrée est dite symétrique si ses termes, deux à deux symétriques par rapport à sa diagonale principale, sont égaux.

Exemple :

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \\ 2 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$ est une matrice symétrique

Propriété : La ligne de rang K est identique à la colonne de rang K dans une matrice symétrique.

Remarque : Les matrices diagonales représentent un cas particulier de matrices symétriques.

NATIONS UNIES
INSTITUT AFRICAIN
DE DEVELOPPEMENT ECONOMIQUE
ET DE PLANIFICATION
D A K A R

IDEP/ET/XXXIII/356
Cours 2

M. Bastiani

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

COURS II

INVERSE D'UNE MATRICE CARREE - DETERMINANTS - APPLICATION A LA RESOLUTION D'EQUATIONS LINEAIRES - RANG D'UNE MATRICE QUELCONQUE.

II - 1 - Inverse d'une matrice carrée.

II - 1 - 1 - Définition.

Si $[A]$ et $[B]$ sont deux matrices carrées de même forme, telles que le produit $[B] \cdot [A]$ est égal à la matrice identité I (également de même forme), $[B]$ sera l'inverse de $[A]$.

On écrit $[A^{-1}]$ par analogie avec l'inverse d'un nombre.

Si $[A^{-1}]$ est l'inverse de $[A]$ on a : $[A^{-1}] \cdot [A] = [A] \cdot [A^{-1}] = I$

En effet multiplions $[A^{-1}] \cdot [A]$ par $[A^{-1}]$, on a :

$[A^{-1}] \cdot [A] \cdot [A^{-1}] = [A^{-1} \cdot A] \cdot [A^{-1}] = I \cdot [A^{-1}]$

puisque par définition $A^{-1} \cdot A = I$

mais $[A^{-1} \cdot A] \cdot [A^{-1}]$ peut aussi s'écrire : $[A^{-1}] \cdot [A \cdot A^{-1}]$

On a : $[A^{-1}] \cdot [A \cdot A^{-1}] = I \cdot [A^{-1}] = [A^{-1}] \cdot I$

$$\text{D'où : } A \cdot A^{-1} = I$$

Dans ce cas, le produit d'une matrice par son inverse est commutatif.

II - 1 - 2 - Premier Théorème fondamental.

Une matrice carrée ne peut avoir qu'une seule matrice inverse.

Soit $[A]$ qui a deux matrices inverses $[A^{-1}]$ et $[B]$. Nous allons montrer que $[A^{-1}] \equiv [B]$

Par hypothèse : $[B \cdot A] = I$

Donc $[B \cdot A] \cdot A^{-1} = [B] \cdot [A] \cdot [A^{-1}] = [B] \cdot [A \cdot A^{-1}] = [B] \cdot I = [B]$

$[B \cdot A] \cdot A^{-1}$ est égal aussi à : $I \cdot [A^{-1}] = [A^{-1}]$

$$\text{D'où : } [A^{-1}] \equiv [B]$$

<u>Remarque</u> : Il peut exister des matrices non nulles qui n'ont pas d'inverse.

Par exemple : $[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Le produit $[A] \cdot [B] = 0$

Montrons que $[A]$ et $[B]$ n'ont pas d'inverse.

Si $[A]$ avait une inverse $[A^{-1}]$ on aurait :

$B = I \cdot B = [A^{-1} \cdot A] \cdot [B] = [A^{-1}] \cdot [AB] = A^{-1} \cdot 0 = 0$

ce qui est contraire à l'hypothèse $[B]$ non nulle

Le même raisonnement s'appliquerait à $[B]$

II - 1 - 3 - Second théorème fondamental.

Une matrice carrée a une inverse si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

Ce théorème sera justifié, une fois précisée la notion de déterminant.

II - 2 - Notion de déterminant.

II - 2 - 1 - Définitions

A toute matrice carrée $[A]$, on associe un nombre noté $|A|$ qui est appelé déterminant de cette matrice.

Par convention, si la matrice carrée est d'ordre 1, son déterminant sera identique à l'élément qu'elle comprend.

Exemple : si $[v] = (1/2)$ on aura : $|v| = 1/2$

Si dans une matrice carrée $[A]$ d'ordre n, on supprime une ligne i et une colonne j, on obtient une matrice carrée d'ordre n - 1. Le déterminant de cette nouvelle matrice est appelé <u>mineur</u> de l'élément a_{ij}, on l'écrit $|A_{ij}|$.

On montre que le déterminant de la matrice $[A]$ s'obtient, à partir des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque et des mineurs correspondants, en formant l'expression :

$$|A| = \sum (-1)^{i+j} (A_{ij}) \cdot a_{ij}$$

Application :

a) Déterminant d'une matrice d'ordre 2

soit : $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Prenons la première ligne. Le mineur de l'élément 1 est 4, le mineur de l'élément 2 est 3. On aura

$$|A| = (-1)^{1+1}\, 4 \times 1 + (-1)^{1+2}\, 3 \times 2 = 4 - 6 = -2$$

Si on avait choisi la seconde colonne, on aurait trouvé le même résultat :

$$[A] = (-1)^{1+2}\ 3 \times 2 + (-1)^{2+2}\ 1 \times 4 = 4 - 6 = -2$$

b) Déterminant d'une matrice d'ordre 3

$$\text{Soit} \quad [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Prenons la seconde ligne. On aura :

$$[A] = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . 4 + (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . 5 + (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} . 4$$

$$= -(2-3).\,4 + (1-9).\,5 - (1-6).\,4 = 4 - 40 + 20 = \boxed{-16}$$

II - 2 - 2 - Propriétés des déterminants.

a) Le déterminant d'un produit de deux matrices carrées de même forme est égal au produit des déterminants de chacune d'elles.

Conséquence : le déterminant du produit de deux matrices carrées de même forme ne peut être nul que si l'une des matrices a elle-même un déterminant nul.

Cette conséquence permet de démontrer le second théorème fondamental du chapitre II - 1.

En effet, soit une matrice carrée $[A]$ qui a une inverse $[A^{-1}]$. Par définition on a : $[A] \, . \, [A^{-1}] = I$ le déterminant de I étant égal à 1 est différent de zéro. Ce qui implique que les déterminants de $[A]$ et $[A^{-1}]$ sont également différents de zéro.

Si le déterminant de $[A]$ est nul et si $[A^{-1}]$ représente l'inverse de $[A]$ on a : $|A| \, . \, |A^{-1}| = 1$ ou $0 \times |A^{-1}| = 1$ ce qui est impossible.
Donc $[A]$ ne peut avoir d'inverse.

Exemple : la matrice $[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ n'a pas d'inverse. En effet

$$[A] = (-1)^{1+1}.\,3\,.\,(4-3) + (-1)^{2+1}.\,1.(4-1) + (-1)^{3+1}.0.(6-2) = 3 - 3 + 0 = 0$$

b) Il n'est pas vrai, en général, que le déterminant de la somme de deux matrices est égal à la somme des déterminants.

Exemple : soit $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $[B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ on a : $[A] + [B] = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

$|A| = -2 \qquad |B| = -3 \qquad |A + B| = -8$ D'où $|A + B| \neq |A| + |B|$

II - 3 - Règle pour inverser une matrice carrée.

Soit une matrice carrée $[A]$ dont le déterminant $|A|$ n'est pas nul. $[A]$ est encore appelée matrice régulière. Pour effectuer l'inversion de $[A]$, c'est-à-dire déterminer la matrice $[A^{-1}]$ inverse de $[A]$, la règle est la suivante :

L'élément situé à l'intersection de la ligne N° i et de la colonne n° j de la matrice inverse s'obtient en divisant par le déterminant $|A|$ de la matrice à inverser le mineur de l'élément correspondant de sa transposée multiplié par le coefficient : $(-1)^{i+j}$

Exemple : soit à inverser $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ dont le déterminant

$|A| = -10$ La transposée de $[A]$ s'écrit : $[A'] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

D'où : $[A^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{-10} & \frac{-3}{-10} \\ \frac{-4}{-10} & \frac{1}{-10} \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

On vérifie que : $[A] \cdot [A^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

Cas particuliers :

1 - Inverse d'une matrice diagonale. C'est une matrice diagonale dont les éléments sont les inverses des éléments correspondants de la matrice à inverser :

Exemple $\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ a pour inverse $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

2 - Inverse de la matrice identité : $[I^{-1}] = I$

II - 4 - Inverse du produit de plusieurs matrices.

L'inverse du produit de plusieurs matrices carrées de même ordre prises dans un certain ordre est égal au produit des inverses de ces matrices prises dans l'ordre inverse : $\Big[[A] \times [B] \times [C]\Big]^{-1} = [C^{-1}] \cdot [B^{-1}] \cdot [A^{-1}]$

Exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 18 \\ 32 & 22 \end{bmatrix}$ dont l'inverse est :

$$\begin{bmatrix} 22/40 & -18/40 \\ -32/40 & 28/40 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 22 & -18 \\ -32 & 28 \end{bmatrix}$$ qui est bien égal au produit :

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{+10} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>II - 5 - Première application : Résolution d'un système d'équations linéaires.</u>

On a :

$$(1) \quad \begin{cases} Y_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots a_{1n} X_n \\ Y_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots a_{2n} X_n \\ \vdots \\ Y_m = a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots a_{mn} X_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle ce système s'écrit :

$$(Y) = [A] \; (X)$$

Y étant le vecteur colonne $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{pmatrix}$ que l'on suppose donné.

$[A]$ étant la matrice des coefficients de forme m x n : $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

X étant le vecteur colonne $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ inconnu

Résoudre le système (1) c'est exprimer (X) en fonction de (Y)

Multiplions les deux membres de l'équation matricielle par $[A^{-1}]$

On a : $[A^{-1}] \cdot (Y) = [A^{-1}] \cdot [A] \cdot (X)$

ou $[A^{-1}] \cdot (Y) = I \cdot (X) = (X)$

$$(X) = [A^{-1}] \cdot (Y)$$

Il suffit donc d'inverser la matrice des coefficients pour résoudre le système (1).

II - 6 - Seconde application : Modèle ouvert de LEONTIEF.

On part du tableau d'inputs-outputs suivant :

		Inputs des branches 1	2 ...	j ...	n	Utilisations finales	Total Outputs
Outputs des Branches	1	x_{11}	x_{12} ...	x_{1j} ...	x_{1n}	y_1	X_1
	2	x_{21}	x_{22} ...	x_{2j} ...	x_{2n}	y_2	X_2
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	i	x_{i1}	x_{i2} ...	x_{ij} ...	x_{in}	y_i	X_i
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	x_{n1}	x_{n2} ...	x_{nj} ...	x_{nn}	y_n	X_n
Facteurs primaires		z_{K1}	z_{K2} ...	z_{Kj} ...	z_{Kn}		
Total inputs		X_1	X_2 ...	X_j ...	X_n		

On fait l'hypothèse que tout flux entrant dans une branche est proportionnel à la production totale

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$$

a_{ij} est la consommation intermédiaire de produit i nécessaire pour obtenir une unité du produit j. On l'appelle consommation unitaire.

Pour les facteurs primaires on suppose : $z_{Kj} = f_{Kj} \cdot X_j$, f_{Kj} étant la quantité de facteur primaire nécessaire pour obtenir une unité du produit j.

On a le système :

$$(1) \begin{cases} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots a_{1n} X_n + y_1 = X_1 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots a_{2n} X_n + y_2 = X_2 \\ \vdots \\ a_{n1} X_1 + a_{n2} X_2 + \dots a_{nn} X_n + y_n = X_n \end{cases}$$

qui peut s'écrire :

$$(1') \begin{cases} (1 - a_{11}) X_1 - a_{12} X_2 \dots - a_{1n} X_n = y_1 \\ - a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 \dots - a_{2n} X_n = y_2 \\ \vdots \\ - a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 \dots + (1 - a_{nn}) X_n = y_n \end{cases}$$

Sous forme matricielle : $\left[I - A\right] \; (X) = (Y)$

A étant la matrice des coefficients unitaires.

Si les objectifs de consommation finale (Y) sont donnés, les productions totales (X) nécessaires pour en assurer la satisfaction sont solutions de l'équation.

$$(X) = \left[I - A\right]^{-1} . (Y)$$

D'autre part, on a :

$$z_K = f_{K1} . X_1 + f_{K2} X_2 + \dots + f_{Kn} X_n$$

ou $(Z) = \left[F\right] . (X)$

$\left[F\right]$ étant la matrice des consommations unitaires de facteurs primaires.

$$(Z) = \left[F\right] . \left[I - A\right]^{-1} . (Y)$$

On peut ainsi calculer (X) et (Z), c'est-à-dire la production totale qui assurera une consommation finale donnée et la quantité de facteurs primaires à mettre en oeuvre en vue de cette consommation.

Méthode pratique de résolution : le tableau d'inputs-outputs comportant en général un nombre important de lignes et de colonnes, on peut difficilement effectuer l'inversion de la matrice $\left[I - A\right]$. Aussi utilise-t-on l'identité remarquable suivante :

$$\left[I - A\right]^{-1} = I + \left[A\right] + \left[A^2\right] + \left[A^3\right]$$

analogue à l'identité

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots .$$

des nombres réels

$$(X) = \left[I - A\right]^{-1} . (Y) \text{ devient ainsi :}$$

$$(X) = \left[I\right] . (Y) + \left[A\right] . (Y) + \left[A^2\right] . (Y) + \left[A^3\right] . (Y) + \dots .$$

On calcule ainsi la production totale en ajoutant successivement à la demande finale, les consommations intermédiaires directement nécessaires à cette demande finale, puis les consommations intermédiaires nécessaires aux consommations intermédiaires directement utilisées pour la demande finale, et ainsi de suite.

Remarque : Si on fait l'hypothèse supplémentaire que chaque bien i est affecté d'un prix p_i et chaque facteur primaire K d'un coût s_K, on aura :

$$p_i = \sum_j p_j . a_{ji} + \sum_K s_K . f_{Ki}$$

ce qui signifie que le prix du bien i est égal à la somme des valeurs des consommations intermédiaires et des facteurs primaires utilisés pour produire une unité de bien i.

On peut écrire le système suivant :

$$\begin{cases} (1 - a_{11}) \cdot p_1 - a_{21} p_2 \dots - a_{n1} p_n = s_1 \cdot f_{11} + s_2 \cdot f_{21} + \dots + s_n \cdot f_{n1} \\ - a_{12} \cdot p_1 + (1 - a_{22})\, p_2 \dots - a_{n2}\, p_n = s_1 \cdot f_{12} + s_2 \cdot f_{22} + \dots + s_n \cdot f_{n2} \\ \vdots \\ - a_{1n}\, p_1 - a_{2n}\, p_2 \dots + (1 - a_{nn})\, p_n = s_1 \cdot f_{1n} + s_2 \cdot f_{2n} + \dots + s_n \cdot f_{nn} \end{cases}$$

ou sous forme matricielle :

$$\left[I - A' \right] \cdot (p) = \left[F' \right] \cdot (s)$$

$\left[A' \right]$ étant la transposée de $\left[A \right]$, $\left[F' \right]$ étant la transposée de $\left[F \right]$,

(p) étant le vecteur colonne prix $\begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$

(f) étant le vecteur colonne coût des facteurs $(s_1 \dots s_n)$

Le calcul de (p) s'effectue suivant l'équation matricielle ci-après :

$$(p) = \left[I - A' \right]^{-1} \cdot \left[F' \right] \cdot (s)$$

<u>II - 7 - Rang d'une matrice quelconque.</u>

Le rang d'une matrice de forme m x n est l'ordre du plus grand déterminant non nul que l'on peut extraire de cette matrice.

On extrait un déterminant d'une matrice en choisissant des lignes et des colonnes et en retenant les éléments communs à ces lignes et ces colonnes.

Exemples :

a) Soit $\left[A \right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

un déterminant extrait de cette matrice de forme 3 x 5 sera : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

b) La matrice : $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ est de rang 2 puisque le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ d'ordre 2 n'est pas nul : il a pour valeur - 9.

M. Bastiani

Cours III

NOTION D'ESPACE VECTORIEL - DISTANCE DE DEUX POINTS DANS UN ESPACE VECTORIEL - EXPRESSION DU COSINUS DE DEUX VECTEURS - VARIETES LINEAIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL A T DIMENSIONS - NOTIONS SUR LES ENSEMBLES CONVEXES

III - 1 - NOTION D'ESPACE VECTORIEL.

III - 1 - 1 - Définitions.

Un espace vectoriel est un ensemble de vecteurs possédant des propriétés particulières. Il existe dans un espace vectoriel E un système de vecteurs linéairement indépendants qu'on appelle base ou repère de E. Soit par exemple V_1, V_2, ... V_n ces vecteurs : leur nombre n caractérise la dimension de E. On parlera ainsi d'espaces vectoriels à 1, 2, 3 ... n dimensions.

Tout vecteur X de l'espace vectoriel E de dimension n peut être mis, d'une manière et d'une seule, sous la forme :

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \cdot V_i$$

les V_i constituant la base de E, les α_1 étant des scalaires.

Rappel : On dit que n vecteurs V_1, V_2 ... V_n sont linéairement indépendants lorsque la combinaison linéaire $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots \lambda_n V_n$ est nulle, si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_n = 0$, les λ_1 étant des scalaires quelconques.

Si $\lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_n = 0$ on a évidemment : $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots \lambda_n V_n = 0$; mais l'indépendance linéaire des vecteurs V_1 ... V_n signifie que l'égalité $\lambda_1 V_1 + \dots \lambda_n V_n = 0$ n'est vérifiée que si : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$

Quand des vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont linéairement dépendants. Dans ce cas, on peut avoir :

$$\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots \lambda_n V_n = 0$$

sans que les λ_1 soient tous nuls.

III - 1 - 2 - Exemple d'indépendance linéaire - Les vecteurs $a = (1, -1, 2)$, $b = (2, 4, 1)$, $c = (3, -1, -2)$ sont linéairement indépendants.

Formons : $\lambda a + \mu b + \nu c = \lambda(1, -1, 2) + \mu(2, 4, 1) + \nu(3, -1, -2)$
$$= \left[\lambda + 2\mu + 3\nu,\ -\lambda + 4\mu - \nu,\ 2\lambda + \mu - 2\nu\right]$$

Montrons que si ce vecteur est nul, λ, μ et ν sont également nuls.

Si le vecteur est nul on a :
$$(1)\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ -\lambda + 4\mu - \nu = 0 \\ 2\lambda + \mu - 2\nu = 0 \end{cases}$$

λ, μ, ν doivent vérifier le système (1) qui n'a qu'une seule solution :
$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

Donc les vecteurs a, b, c sont linéairement indépendants.

III - 1 - 3 - Exemple de dépendance linéaire. Les vecteurs $a = (3, 1, -1, 2)$, $b = (1, 0, -2, 3)$ et $c = (-4, -1, 3, -5)$ sont linéairement dépendants.

Formons $\lambda a + \mu b + \nu c = \left[3\lambda + \mu - 4\nu,\ \lambda - \nu,\ -\lambda - 2\mu + 3\nu,\ 2\lambda + 3\mu - 5\nu\right]$

Montrons que si ce vecteur est nul, λ, μ, ν ne seront pas forcément nuls.

Si le vecteur est nul, on a :
$$\begin{aligned} 3\lambda + \mu - 4\nu &= 0 \quad (1) \\ \lambda - \nu &= 0 \quad (2) \\ -\lambda - 2\mu + 3\nu &= 0 \quad (3) \\ 2\lambda + 3\mu - 5\nu &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Ce système de quatre équations a évidemment pour solution : $\lambda = \mu = \nu = 0$

Mais ce n'est pas la seule solution. En effet (2) nous donne $\lambda = \nu$

et (3) devient : $2\lambda - 2\mu = 0$ ou $\lambda = \mu$

Le système admet donc toute solution : $\lambda = \mu = \nu = K$, K étant un scalaire quelconque, positif ou nul.

Donc les trois vecteurs a, b, c sont linéairement dépendants.

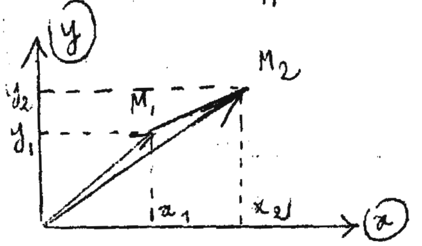
Vérification : On a par exemple
$$a + b + c = 0$$

les λ, μ, ν sont dans ce cas égaux à 1 (et non nuls).

III - 2 - Distance de deux points.

III - 2 - 1 - Distance de deux points M_1 et M_2 dans le plan R^2.

On a : $\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$



$$\overrightarrow{M_1 M_2}^2 = \overrightarrow{M_1 H}^2 + \overrightarrow{HM_2}^2$$

Par définition la distance de M_1 et M_2 sera la longueur $M_1 M_2$ qu'on note $d(M_1 M_2)$

On aura donc : $d^2 (M_1M_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

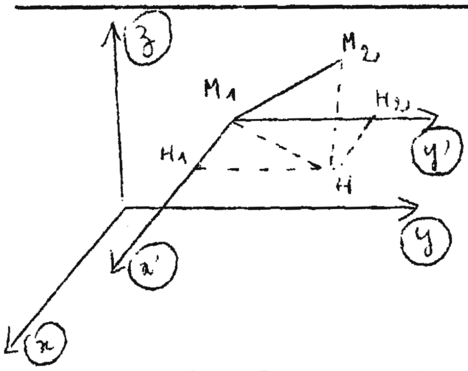
$d(M_1M_2) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ c'est une quantité toujours positive.

Au lieu de distance de 2 points M_1, M_2 on peut parler de distance de 2 vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ $\overrightarrow{OM_2}$. On confond ainsi le point M_1 avec le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$: les coordonnées de l'un étant identiques aux composantes de l'autre.

Cas particulier : Si M_1 est confondu avec l'origine O, on a :

$$d^2 (OM_2) = x_2^2 + y_2^2$$

III - 2 - 2 - Distance de 2 points M_1 et M_2 dans l'espace R_3.



On a : $\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{M_1M_2}^2 = \overrightarrow{M_1H}^2 + \overrightarrow{HM_2}^2 = \overrightarrow{M_1H_1}^2 + \overrightarrow{M_1H_2}^2 + \overrightarrow{HM_2}^2$$

On note toujours $d(M_1 M_2)$ la distance de M_1 et M_2.

$$d^2 (M_1M_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

III - 2 - 3 - Distance de deux points M_1 et M_2 dans l'espace R^T (T dimensions).

Par analogie avec la définition de la distance de deux points dans l'espace à deux et l'espace à trois dimensions, on exprimera le carré de la distance de deux points M_1 et M_2 dans l'espace R^T par :

$$d^2 (M_1M_2) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots (y_T - x_T)^2$$

$$\text{ou } d^2 (M_1M_2) = \sum_{t=1}^{t=T} (y_t - x_t)^2$$

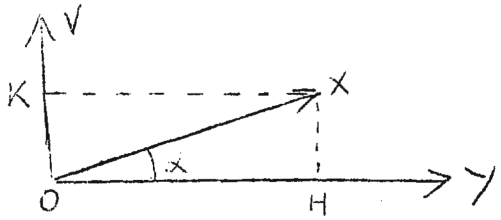
$x_1, x_2 \dots x_T$ et $y_1, y_2 \dots y_T$ étant respectivement les coordonnées de M_1 et M_2 (ou les composantes de $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$) dans l'espace à T dimensions.

d^2 $(M_1\ M_2)$ est le carré de la longueur du vecteur $D = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_T - x_T \end{pmatrix}$

en particulier $d^2\ (OM_2) = \sum_1^T y_t^2$

III - 3 - EXPRESSION DU COSINUS DE L'ANGLE DE DEUX VECTEURS.

Soient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ deux vecteurs du plan R^2 et α leur angle



On a l'égalité vectorielle :
$\vec{OX} = \vec{OH} + \vec{OK}$
OH étant la projection de $\vec{OX}$ sur $\vec{OY}$
OK étant la projection de $\vec{OX}$ sur $\vec{OV}$ orthogonal à $\vec{OY}$.

Calculons le produit scalaire $\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle$

$\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle = \langle \vec{OH} + \vec{OK}, \vec{OY} \rangle = \langle \vec{OH}, \vec{OY} \rangle + \langle \vec{OK}, \vec{OY} \rangle$

$\langle \vec{OK}, \vec{OY} \rangle$ est nul puisque $\vec{OK}$ et $\vec{OY}$ sont orthogonaux

D'où :
$$\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle = \langle \vec{OH}, \vec{OY} \rangle = \langle \frac{OH}{OY} . \vec{OY}, \vec{OY} \rangle$$

$\vec{OH}$ et $\vec{OY}$ étant collinéaires

Il vient : $\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle = \frac{OH}{OY} . OY^2$

Or $|OH| = |OX| \cos\alpha$ D'où : $\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle = |OX| . |OY| \cos\alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{OX}, \vec{OY} \rangle}{|OX| . |OY|}$$

Ainsi : le cosinus de l'angle de deux vecteurs est égal au rapport du produit scalaire des deux vecteurs au produit de leurs longueurs.

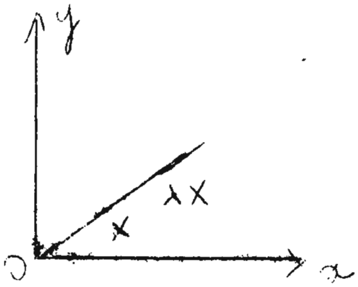
III - 4 - VARIETES LINEAIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL A T DIMENSIONS.

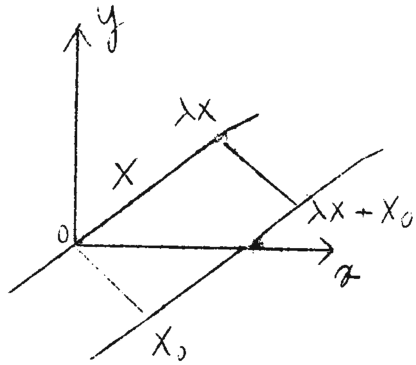
III - 4 - 1 - Dans le plan R^2.

On définit une droite passant par l'origine comme l'ensemble des points de la forme : λX, X étant un point donné de R^2 et λ un scalaire quelconque.

Plus généralement, on définit une droite passant par le point X_o comme l'ensemble des points de la forme :

$\lambda X + X_o$ X et X_o étant deux points de R^2 et λ un scalaire quelconque.





III - 4 - 2 - Dans l'espace R^3 :

On définit une droite passant par le point X_o comme l'ensemble des points de la forme : $\lambda X + X_o$

On définit un plan passant par les points X_o et X_1, comme l'ensemble des points de la forme $\lambda X + \mu X_1 + \nu X_o$

λ, μ, ν étant des scalaires quelconques

III - 4 - 3 - Dans l'espace R^T.

Par analogie, on définira dans l'espace à T dimensions des ensembles de points appelés variétés linéaires de la forme :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + \dots a_p X_p$$

où $X_1 \dots X_p$ sont des vecteurs donnés, $a_1 \dots a_p$ des scalaires quelconques.

Aux droites correspondront des variétés de la forme : $\lambda X_1 + X_2$

Aux plans correspondront des variétés de la forme : $\lambda X_1 + \mu X_2 + \nu X_3$

III - 5 - NOTIONS SUR LES ENSEMBLES CONVEXES.

III - 5 - 1 - Concept de convexité.

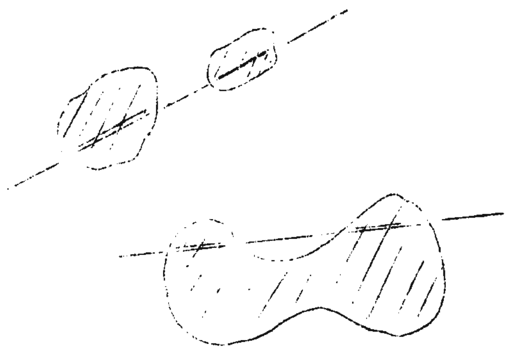
Soit un ensemble de points du plan : D. On dit que D forme un domaine convexe si toute intersection non vide d'une droite et de D se compose d'un seul segment fermé.

Un ensemble convexe est donc un domaine convexe, c'est-à-dire tel que si A et B sont deux points de D, il existe au moins un segment de droite continu formé de points de D et réunissant A et B.

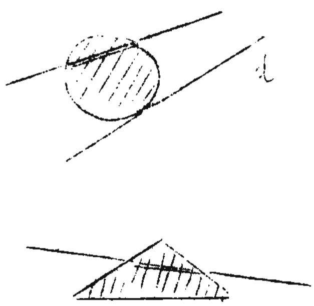
Les points frontières font partie du domaine : en chaque point frontière il existe une droite au moins qui laisse tous les points dans un des deux demi-plans qu'elle définit.

Exemples :

Domaines non convexes



Domaines convexes

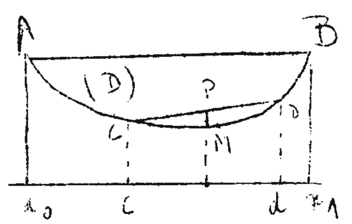


III - 5 - 2 - Courbe convexe.

Soit une fonction $y = f(x)$ définie et continue pour $x \in [x_0 \; x_1]$ et admettant une dérivée seconde de signe variable sur x_0, x_1

Prenons : $y'' > 0$

y' est donc une fonction croissante de x. Le domaine (D) formé par l'arc de courbe AB et la sécante AB est convexe, toute tangente à la courbe laissant ce domaine dans un seul demi-plan.



Soient deux points C et D de la courbe, le segment CD appartient au domaine (D) et l'arc de courbe CMD sera situé d'un seul côté du segment CD. Si P est le milieu de AB on aura: $f(P) = \frac{1}{2}\left[f(c) + f(d)\right]$, $f(c)$ et $f(d)$ étant les ordonnées de C et D. L'abcisse de P sera $\frac{c+d}{2}$, c et d étant les abcisses de C et D. Soit M le point de la courbe d'abscisse $\frac{c+d}{2}$

On aura : $f(M) = f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(c) + \frac{1}{2} f(d)$

III - 5 - 3 - Le barycentre ou opérateur linéaire convexe.

a - Barycentre de deux points.

Soient deux points A et B affectés des coefficients a et b positifs ou nuls. Soit O un point quelconque du plan. On appelle barycentre de A et B le point M defini par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{OB}$$

Propriété : M ne dépend pas du point O. En effet, soit O' un autre point du plan. On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \frac{a}{a+b}\left[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}\right] + \frac{b}{a+b}\left[\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'B}\right]$$

D'où $\overrightarrow{O'M} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{O'A} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{O'B}$

Si on remplace O par A on obtient : $\overrightarrow{AM} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{AA} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB} = \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{AB}$

Si on remplace O par M on obtient : $\overrightarrow{MM} = \frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{MB}$

Ou encore $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} - \frac{b}{a}$

Si le rapport $\frac{b}{a}$ varie de 0 à l'infini, M décrit le segment AB de A en B.

Donc : l'ensemble des barycentres des points A et B est constitué par l'ensemble des points du segment fermé $[A,\ B]$.

b - Barycentre de trois points.

Soient trois points A, B, C, affectés des coefficients a, b, c, positifs ou nuls. Soit O un point quelconque du plan formé par A B C. On appelle barycentre de A, B et C le point M défini par la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{a+b+c}\,\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{OB} + \frac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{OC}$$

Propriété : On peut écrire $\overrightarrow{OM} = \frac{a+b}{a+b+c}\underbrace{\left[\frac{a}{a+b}\,\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\,\overrightarrow{OB}\right]}_{OM_1} + \frac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{OC}$

ou : $\overrightarrow{OM} = \frac{a+b}{a+b+c}\,\overrightarrow{OM_1} + \frac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{OC}$ M_1 étant le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b.

Ainsi : pour obtenir le barycentre d'un ensemble de points, on peut remplacer plusieurs points par leur barycentre, ce point étant affecté d'un coefficient égal à la somme des coefficients des points dont il est le barycentre.

Conséquence : Le barycentre de trois points A, B, C est un point du triangle ABC (domaine fermé qui comprend les points intérieurs du triangle et les points frontières des côtés).

c - Barycentre de n points.

Dans un espace de points repérés vectoriellement par T coordonnées (espace "affine" à T dimensions) on considère n points P_i

P_i (ou $\overrightarrow{OP_i}$) aura pour composantes : x_{1i} , x_{2i} , ... x_{Ti}

On appelle barycentre des n points P_i affectés respectivement des coefficients $a_i \geqslant 0$, le point M tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\sum a_i \overrightarrow{OP_i}}{\sum a_i}$$

le point M est indépendant de O et ses coordonnées sont x_1 ... x_T telles que :

$$x_K = \frac{\sum a_i x_{Ki}}{\sum a_i}$$

Dans la recherche d'un barycentre, on peut toujours remplacer plusieurs points par leur barycentre.

III - 5 - 4 - Polygones ou polyèdres convexes.

Définition : On donne n points M_i dans un espace à T dimensions. L'ensemble des barycentres des n points M_i est appelé : polyèdre convexe engendré par les M_i . On le note : $\mathcal{P}(M_1 \ldots M_i \ldots M_n)$.

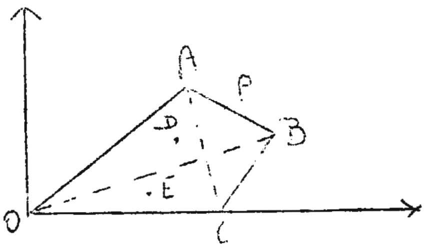
a) Espace à une seule dimension. Soient deux points M_1 et M_2 qui seront les sommets du segment polygone convexe qu'ils limitent.

Si $A \in \mathcal{P}(M_1 \; M_2)$
$B \in \mathcal{P}(M_1 \; M_2)$ on a : $\mathcal{P}(AB) \subset \mathcal{P}(M_1 \; M_2)$

puisque l'ensemble des barycentres des points M_1 et M_2 est constitué par l'ensemble des points du segment fermé $[M_1 \; M_2]$

<u>b) Espace à deux dimensions</u>. Soient six points OABCDE. On aura :

On aura : $\mathcal{P}(OABCDE) = \mathcal{P}(OABC)$



car D et E sont des barycentres de AOB et de OBC.

O, A, B, C, seront les sommets du polygone convexe. Les segments OA, AB, seront les arêtes.

Tout point P d'une arête est appelé point frontière : c'est le barycentre des quatre sommets O A B C, deux coefficients au moins étant nécessairement nuls. Par exemple P sur A B sera le barycentre de $\begin{cases} O & A & B & C \\ (0) & (a) & (b) & (0) \end{cases}$

<u>c) Espace à trois dimensions</u>. Soient quatre points A B C D.

$\mathcal{P}$ (A B C D) sera le tétraèdre de sommets A B C D. Tout point M de $\mathcal{P}$ sera barycentre de A B C D avec les coefficients a, b, c, d.
Si trois des coefficients sont nuls, le point M est un sommet.
Si deux des coefficients sont nuls, le point M est sur une arête.
Si un des coefficients est nul, le point M est dans une face de $\mathcal{P}$.
Si $M_1, M_2, M_3, M_4 \in \mathcal{P}$, on aura : $\mathcal{P}(M_1\ M_2\ M_3\ M_4) \subset \mathcal{P}(A\ B\ C\ D)$

<u>d) Espace "affine" à T dimensions</u>. Soit un ensemble de points D de l'espace affine. Cet ensemble est dit domaine convexe si quels que soient les points $M_1 \ldots M_n \in D$, tout barycentre de $M_1 \ldots M_n$ appartient aussi à D.

Tout segment fermé $[M_1\ M_2]$ défini par deux points de D est inclus dans D.

En outre, si $M_1 \ldots M_n \in D$ $\mathcal{P}(M_1 \ldots M_n) \subset D$

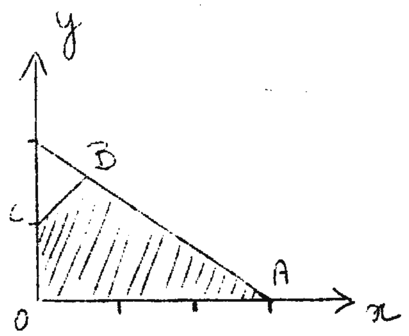
<u>III - 5 - 5 - Relation fondamentale des domaines convexes</u>.

L'intersection de deux domaines convexes est un domaine convexe.
Conséquence : l'intersection de plusieurs demi-plans fermés constitue un polygone convexe dans l'espace à 2 dimensions.

Ainsi, les points du plan qui représentent les solutions simultanées d'un système d'inéquations linéaires du type $ax + by + c > < 0$ forment un ensemble polygonal convexe.

Exemple : Soit le système suivant d'inéquations linéaires :

$$x \geqslant 0$$
$$y \geqslant 0$$
$$2x + 3y - 6 \leqslant 0$$
$$x - y + 1 \geqslant 0$$



Les solutions du système sont les points du polygone convexe O A B C limité par les droites d'équations :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Coordonnées de O (0, 0)
de A (3, 0)
de B (3/5, 8/5)
de C (0, 1)

M. Bastiani

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

Cours IV

NOTIONS SUR LES FONCTIONS LINEAIRES - MAXIMUM ET MINIMUM DE FONCTIONS LINEAIRES.

IV - 1 - INTRODUCTION.

Les vecteurs et matrices servent à représenter par une seule expression plusieurs quantités différentes. Par exemple, les produits livrés par les industries d'un pays donné peuvent être représentés par un vecteur ligne

$$X = (x_1 \ldots\ldots x_n)$$

les x_i étant les quantités de produits 1... i ... n livrés.

Considérons un vecteur-colonne Y qui représentera les prix de chacun des produits i :

$$Y = \begin{pmatrix} y1 \\ \cdot \\ \cdot \\ yn \end{pmatrix}$$

$X.Y = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \, y_i$ représente la valeur totale de la production globale des industries.

On constate que :

1) Si X est multiplié par un scalaire K:$(K\ X).Y = K \times Y$
ce qui signifie que si la production globale est multipliée par 2, 3, 4 .... sa valeur totale sera également multipliée par 2, 3, 4 ....

2) Si $X = X_1 + X_2$ on a : $X\ Y = (X_1 + X_2).Y = X_1\ Y + X_2\ Y$
ce qui signifie que si X_1 représente la production globale d'une région 1 et X_2 la production globale d'une région 2, le pays étant divisé en deux régions 1 et 2, la valeur totale de la production nationale est égale aux valeurs des deux productions régionales.

IV - 2 - APPLICATION LINEAIRE.

IV - 2 - 1 - Définition.

On appelle application linéaire une application qui a un vecteur $\vec{v}$ associe une fonction $f\ (\vec{v})$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} f\ (v_1 + v_2) = f\ (v_1) + f\ (v_2) \\ \text{et } f\ (\lambda\ v) = \lambda\ f\ (v) \end{array}\right.$$

v_1 et v_2 étant deux valeurs quelconques de v, λ étant un scalaire quelconque.

IV - 2 - 2 - Exemples classiques d'applications linéaires.

Une application qui, à un vecteur colonne $\vec{v}$ associe le produit matriciel $[M].\vec{v}$, $[M]$ étant une matrice de scalaires ayant autant de colonnes que $\vec{v}$ a d'éléments, est une application linéaire.

On peut aussi associer à un vecteur-ligne $\vec{u}$ le produit matriciel $\vec{u}.[M]$ Dans ce cas $[M]$ est une matrice de scalaires ayant autant de lignes que $\vec{u}$ a d'éléments.

Exemples : a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $[M] = (1, 2, -1)$ D'où : $[M]\,\vec{v} = x + 2y - z$

L'application $v \longrightarrow [M]\,\vec{v}$ est linéaire

b) $\vec{u} = (x\ y\ z)$ $[M] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ D'où : $\vec{u}.[M] = 2x + y + 3z$

L'application $\vec{u} \longrightarrow \vec{u}.[M]$ est linéaire

c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $[M].\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{u} = (y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_5)$ $[M] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{u}[M] = (2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_5, y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4)$

Remarque : Lorsque $[M]$ se réduit à un vecteur, on utilise l'expression forme linéaire pour désigner toute application qui à v associe le produit matriciel $[M].\vec{v}$

c'est le cas des exemples a) et b) ci-dessus.

Le vecteur M' transposé de M est souvent appelé covecteur et s'écrit $\underrightarrow{M'}$

Le produit de $\vec{v}$ par $\underrightarrow{M'}$ n'est autre que le produit scalaire de ces vecteurs.

Exemples $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ $\underrightarrow{M'} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{v}, \underrightarrow{M'} \rangle = \vec{M}.\vec{v} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

IV - 3 - FONCTIONS LINEAIRES.

IV - 3 - 1 - Définition.

L'application qui a plusieurs variables $x_1\ x_2\ ..\ x_n$ associe l'expression : $z = z_o + a_1\ x_1 + a_2\ x_2 + .. + a_n\ x_n$

est dite fonction linéaire des variables $x_1,\ x_2\ ...\ x_n$

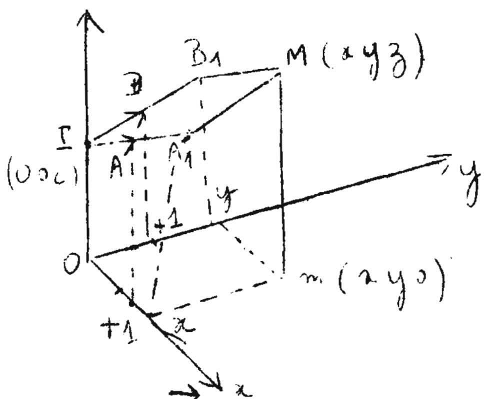
NOTA : Il conviendrait de dire : "fonction à variation linéaire" au lieu de fonction linéaire.

Exemple : $v = 4\ x + 2\ y - z + 3\ t - 8\ u + 1/2$

est une fonction linéaire de 5 variables

$x,\ y,\ z,\ t,\ u$

IV - 3 - 2 - Figuration graphique la fonction : $z = a\ x + b\ y + c$



Soit I le point de l'espace $[0\ x\ y\ z]$ qui a pour composantes (0, 0, c)

Soit M un point quelconque x y z vérifiant $z = a\ x + b\ y + c$

$\vec{IM}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-c \end{pmatrix}$

ou $\begin{pmatrix} x \\ y \\ a\ x + b\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

D'où : $\vec{IM} = x.\ \vec{A} + y\ \vec{B}$

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ étant deux vecteurs donnés indépendants de x et y $\vec{IM}$ appartient ainsi à l'espace vectoriel engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, c'est-à-dire au plan $I\ A_1\ M\ B_1$

L'ensemble des points M dont les coordonnées vérifient $z = a\ x + b\ y + c$ est le plan passant par I et contenant les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

IV - 3 - 3 - Lignes de niveau dans le plan représentatif de $z = a\ x + b$

Ce sont des droites de direction indépendante de leur altitude, leur pente commune étant : $-\frac{a}{b}$, leur ordonnée à l'origine étant $\frac{z_o - c}{b}$

$y = -\frac{a}{b}\,x + \frac{z_o - c}{b}$ sera donc l'équation de la droite de niveau d'altitude z_o.

On a aussi : $z_o = a\ x + b\ y + c$ ou : $\boxed{a\ x + b\ y = cte}$

IV - 3 - 4 - Propriété fondamentale de la fonction linéaire.

Soit : $z = ax + by + c$

Partons des valeurs z_o, x_o, y_o telles que : $z_o = a\, x_o + by_o + c$

Donnons à x_o l'accroissement h, à y_o l'accroissement K

$$z_o + \Delta_1 z = a\,(x_o + h) + b\, y_o + c$$

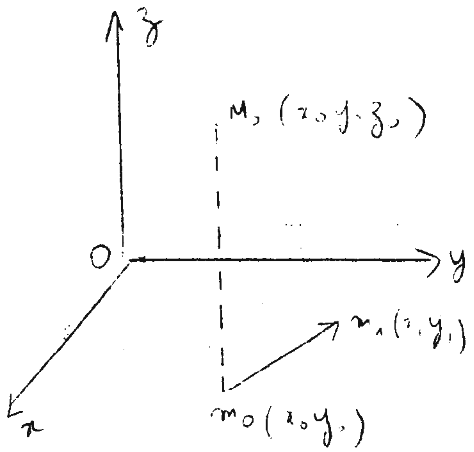
$$z_o + \Delta_2 z = a\,x_o + b\,(y_o + K) + c$$

$$\Delta_1 z + \Delta_2 z = a\,h + b\,K = \Delta z$$

Une variation de x d'amplitude h a pour effet d'augmenter z de a. h
Une variation de y d'amplitude K a pour effet d'augmenter z de b. K
Une variation simultanée de x et y d'amplitudes respectives h et K a pour effet d'augmenter z de a h + b K. On dit qu'il y a <u>additivité des effets</u> : <u>l'effet total sur z est la somme des effets des variations isolées de x et y</u>.

IV - 3 - 5 - Gradient d'une fonction linéaire

soit : $z = a\,x + b\,y + c$



Le point M_o de coordonnées $(x_o\; y_o\; z_o)$ qui appartient au plan représentatif de la fonction z a pour projection le point m_o sur le plan $o_x\; o_y$

Prenons dans ce plan, un point m de coordonnées $x_1 = x_o + h\,a$

$$y_1 = y_o + h\,b$$

h étant un scalaire différent de zéro

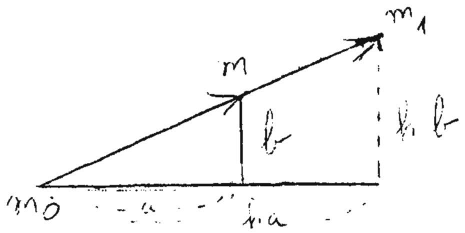
A m_1 est associé un point M_1 appartenant au plan représentatif de la fonction z. Les coordonnées de M_1 seront :

$$x_1 = x_o + h\,a$$

$$y_1 = y_o + h\,b$$

$$z_1 = z_o + h\,(a^2 + b^2)$$

Dans le plan $o_x \; o_y$, le vecteur $\overrightarrow{m_o \, m_1}$ de composantes (a, b) est appelé gradient de z au point m_o



la direction de $\overrightarrow{m_o \, m}$ qui est la même que celle de $\overrightarrow{m_o \, m_1}$ a pour pente **b** : elle est perpendiculaire à la direction des lignes de niveau (droites d'équations : $a\,x + b\,y = cte$ et de pente $- \frac{a}{b}$).

Propriétés du gradient : a) Il indique la direction de la plus forte variation relative de la fonction z. on a en effet :

$$z_1 - z_o = \overline{\Delta} z = h\,(a^2 + b^2) \text{ et } \overline{m_o \, m_1} = h.\sqrt{a^2 + b^2}$$

D'où : $\dfrac{\overline{\Delta}\, z}{\overline{m_o \, m_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ rapport indépendant de h, et dépendant seulement de la direction $m_o \, m_1$

b) Il est dirigé dans le sens de l'augmentation de z (altitude ascendante).

c) Sa longueur est égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$, appelée aussi coefficient d'accroissement de la fonction z.

IV - 3 - 6 - Distance enclidienne d'un point à une droite, d'un point à un plan.

a) - Distance d'un point à une droite.

Soit (D), la droite représentative de la fonction $a\,x + by + c = o$

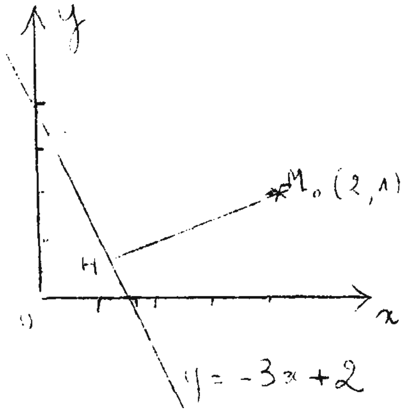
ou : $y = - \frac{a}{b}\,x - \frac{c}{b}$ dans le plan x o y

Soit Mo un point du plan x o y de coordonnées (x o, yo)

On aura : MoH (distance de Mo à D) = $\dfrac{a\,x_o + b\,y_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple : Distance du point (2,1) à la droite d'équation

$y = - 3\,x + 2$ ou $3\,x + y - 2 = o$



$$MoH = \frac{6+1-2}{\sqrt{9+1}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{2,5} \simeq 1,6$$

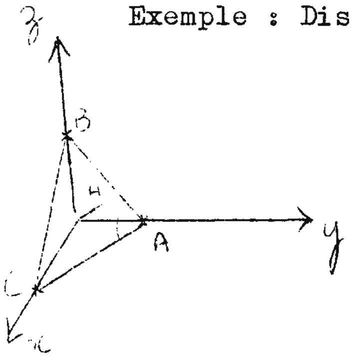
b) - Distance d'un point à un plan.

Soit M o de coordonnées x_o y_o z_o

et P le plan d'équation $a x + by + cz + d = o$

La distance enclidienne de Mo au plan P sera :

$$MoH = \frac{a x_o + by_o + cz_o + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Exemple : Distance de l'origine O (o, o, o) au plan d'équation

$$x + y + z = \lambda$$

$$CH = \left| \frac{-\lambda}{\sqrt{3}} \right| = \left| -\lambda \frac{3}{3} \right| = \lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{si} \quad \lambda > 0$$

$$= -\lambda \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{si} \quad \lambda < 0$$

IV - 4 - MAXIMUM ET MINIMUM DE FONCTIONS LINEAIRES.

IV - 4 - 1 - Définitions.

On appelle polygone tout ensemble polygonal convexe d'aire finie : le polygone est constitué par un certain nombre de côtés et par la surface qu'il circonscrit.

Un polygone a n côtés a n sommets.

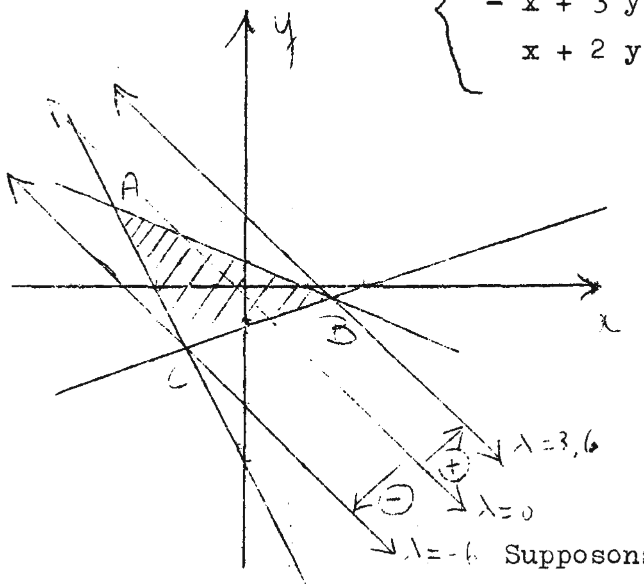
Un sommet d'un polygone est l'intersection des frontières de deux demi-plans : deux des inégalités linéaires qui vérifient l'appartenance à ces demi-plans deviennent alors deux égalités.

De même tout point sur un côté du polygone se trouve sur une frontière donc l'inégalité linéaire qui vérifie l'appartenance au-demi-plan limité par la droite frontière devient alors une égalité.

Un point intérieur au polygone ne correspond qu'à des inégalités strictes ($>$ et non pas $\geqslant$ ou bien $<$ et non pas $\leqslant$).

Exemple : Représentation graphique de l'ensemble polygonal convexe défini par les inégalités :

$$\begin{cases} 2x + y + 9 \geqslant 0 \\ -x + 3y + 6 \geqslant 0 \\ x + 2y - 3 \leqslant 0 \end{cases}$$



Intersection de D_1 d'équation: $2x + y + 9 = 0$
avec D_2 d'équation: $-x + 3y + 6 = 0$
le point C de coordonnées : $-3, -3$

Intersection de D_1 avec D_3 d'équation :
$x + 2y - 3 = 0$
le point A de coordonnées : $-7, +5$

Intersection de D_2 avec D_3
le point B de coordonnées: $\frac{21}{5}, -\frac{3}{5}$

Supposons que x et y représentent deux niveaux d'activité d'une usine, chacune des activités mettant en oeuvre 3 biens dont les quantités des deux premiers satisfont une demande donnée (2 premières inégalités), et dont la quantité du dernier demeure inférieure à une disponibilité donnée (3ème inégalité).

Quels sont les deux niveaux d'activité x et y qui rendront maximum la fonction profit $x + y$, le profit unitaire de x étant le même que celui de y.

Les valeurs x et y sont représentées par un point M du polygone triangle A B C.

La droite d'équation $x + y = \lambda$ est parallèle à la droite d'équation $x + y = o$. La plus grande valeur de λ est obtenue quand $x + y = \lambda$ passe par le point B. On a alors :

$$\frac{21}{5} - \frac{3}{5} = \quad = \frac{18}{5} = 3{,}6$$

La droite $x + y = \lambda$ qui passe par A correspond à $\lambda = -7 + 5 = -2$

La droite $x + y = \lambda$ qui passe par C correspond à $\lambda = -3 - 3 = -6$

$x = \frac{21}{5} = y = -\frac{3}{5}$ correspondent aux deux niveaux d'activité qui rendent $x + y$ maximum.

$x = -3$ $y = -3$ correspondent aux niveaux qui rendent $x + y$ minimum

IV - 4 - 2 - Théorème fondamental.

Théorème : Une fonction linéaire $a x + by + c$ définie par l'étendue d'un polygone convexe prend sa valeur maximum (et sa valeur minimum) à l'un des sommets du polygone.

Soient P_o un sommet de coordonnées x_o y_o et P_1 un sommet de coordonnées x_1 et y_1 du polygone convexe, le segment $P_o P_1$ constituant une arête du polygone.

Supposons que $a x_o + by_o + c \geqslant a x_1 + by_1 + c$ ou $M_o \geqslant M_1$

Un point P du segment P_o P_1 est barycentre des deux points P_o P_1

Ses coordonnées s'écrivent : $\begin{cases} x = \dfrac{\alpha x_o + \beta x_1}{\alpha + \beta} \\ y = \dfrac{\alpha y_o + \beta y_1}{\alpha + \beta} \end{cases}$

$a x + b y + c$ sera égal à : $\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(a x_o + b y_o) + \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(a x_1 + b y_1) + c$

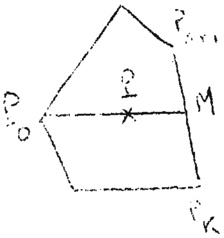
$$\text{ou} \quad \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(M_o - c) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(M_1 - c) + c =$$

$$\frac{\alpha M_o}{\alpha+\beta} + \frac{M_1}{\alpha+\beta} = M$$

$a x + b y + c$ sera compris entre M_1 et M_o

$$M_1 \leqslant M \leqslant M_o$$

Si P est un point intérieur du polygone, $a x + b y + c$ sera inférieure à la valeur de la fonction linéaire correspondant à l'un des deux points P_o ou M, P_o étant un sommet, M étant situé entre deux sommets.



Admettons que ce soit la valeur correspondant à M à laquelle $a\ x + b\ y + c$ sera inférieure. Cette valeur de M sera elle-même inférieure à l'un e des valeurs correspondant aux sommets P_K P_{K+1}
Ainsi de proche en proche, on aboutira à un sommet pour lequel $a\ x + b\ y + c$ aura la plus grande valeur possible sur l'étendue du polygone.
On démontrerait de même que sur l'étendue du polygone, il existe un sommet pour lequel $a\ x + b\ y + c$ aura la plus petite valeur possible.

Conséquence : La méthode permettant de trouver le maximum ou le minimum d'une fonction linéaire $a\ x + b\ y + c$ sur un polygone convexe plan est la suivante :

a) on détermine les sommets du polygone
b) on substitue dans la fonction les coordonnées de chaque sommet
c) la plus grande valeur obtenue est le maximum de la fonction
d) la plus petite valeur obtenue est le minimum de la fonction

La même méthode est applicable à une fonction lénéaire $a\ x + b\ y + cz + d$ dans un polyèdre convexe sur un espace à 3 dimensions.

COMPLEMENTS DE MATHEMATIQUES

Cours V

DERIVEES PARTIELLES ET DIFFERENTIELLE TOTALE D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES - EXTREMUM D'UNE FONCTION DE VARIABLES INDEPENDANTES - EXTREMUM D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES LIEES - EXTREMUM D'UNE FONCTION DE TROIS VARIABLES - CAS GENERAL : MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE.

V - 1 - Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables.

Soit la fonction $Z = f(x,y,t,u,v,.....)$ de plusieurs variables x, y, t, u, v ....

On appelle dérivée partielle par rapport à x (ou y ou t....) la limite, si elle existe, du rapport: $\dfrac{f(x+\Delta x, y, t, u, v...) - f(x, y, t, u, v...)}{x}$

Quand Δx tend vers zéro

ces dérivées partielles s'écrivent: Z'_x, Z'_y, Z'_t, Z'_u, Z'_v........

Lorsque ces dérivées existent, on dit que la fonction Z est dérivable au premier ordre.

Par exemple: Soit $Z = 2x^2 t - xyt + y^2 - t - 7x - 4$

on aura: $Z'_x = 4xt - yt - 7$

$Z'_y = -xt + 2y$

$Z'_t = 2x^2 - xy - 1$

V - 2 - Différentielle totale d'une fonction de plusieurs variables en un point $x_o\ y_o\ t_o\ u_o\ v_o$.......

Soit la fonction $Z = f(x, y, t, u, v.......)$ Posons: $\left.\begin{array}{l}\Delta x = \Delta\theta . dx \\ \Delta y = \Delta\theta . dy \\ \Delta t = \Delta\theta . dt \\ \Delta u = \Delta\theta . du \\ \Delta v = \Delta\theta\ dv\end{array}\right\}$

avec dx, dy, dt, du, dv ....
des constantes arbitraires
et θ, une variable quelconque indépendante
de x, y, t, u, v

On démontre que la limite du rapport : $\dfrac{\Delta Z}{\Delta\theta}$ quand θ tend vers zéro est égale à l'expression: $F'_{x_o} dx + F'_{y_o} dy + F'_{t_o} dt + ...$, Z partant de la valeur $f(x_o y_o t_o u_o v_o ...)$

Cette limite est dite différentielle totale de F en $x_o y_o t_o u_o v_o$.....

On la note dF

D'où: $dF = F'_{x_o} dx + F'_{y_o} dy + F'_{t_o} dt + F'_{u_o} du + ...$

V - 3 - Extremum d'une fonction de plusieurs variables indépendantes.

Soit $Z = f(x, y, t, u, v\ldots)$ une fonction de plusieures variable independantes. Soit $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ t_o \\ u_o \\ v_o \end{bmatrix}$ un maximum de Z par exemple

Si m_o est maximum, toute variation des variables que l'on notera $\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta t \\ \vdots \end{bmatrix}$ ne peut diminuer $Z_o = f(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.)$

En particulier, si l'on fait varier seulement x au voisinage de x_o, en laissant y_o, t_o, u_o, v_o fixés, la fonction: $f(x, y_o, t_o, u_o, v_o \ldots.)$ de x doit admettre um maximum pour $x = x_o$. Donc: $Z'_x(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.) = 0$

De même Z considérée comme fonction de y seul doit avoir um maximum pour $y = y_o$.

Ainsi, on est conduit aux conditions suivantes dites du premier ordre:

$Z'_x(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.) = 0$ $\quad Z'_y(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.) = 0$ $\quad Z'_t(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.) = 0$

$Z'_u(x_o y_o y_o u_o v_o \ldots.) = 0$ $\quad Z'_v(x_o y_o t_o u_o v_o \ldots.) = 0$ etc......

<u>D'ou le résultat important:</u>

Si $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ t_o \\ \vdots \end{bmatrix}$ est un extrêmum pour la fonction $Z = f(x\ y\ t\ u\ v\ \ldots)$

la différentielle totale dZ est identiquement nulle en m_o

$$dZ = Z'_{x_o} dx + Z'_{y_o} dy + Z'_{t_o} dt + Z'_{u_o} du + Z'_{v_o} dv + \ldots. = 0$$

et cela, quels que soient dx, dy, dt, du, dv .....

<u>Exemple:</u> Soit: $Z = 2x^2 - xy + xt - 2yt + y^2 - 7x - 3t$

Trouver le point extrêmum m_o.

$$\text{On a :} \quad \begin{aligned} Z'_x &= 4x - y + t - 7 \\ Z'_y &= -x + 2y - 2t \\ Z'_t &= x - 2y \quad -3 \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre nous donnent le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} 4x - y + t - 7 = 0 \\ -x + 2y - 2t = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \text{qui donne} \quad x = 2 \quad y = -\frac{1}{2} \quad t = -\frac{3}{2}$$

V – 4 – Extrêmum d'une fonction de deux variables liées.

Soit $Z = f(x,y)$ une fonction de deux variables liées x et y. C'est-à-dire telles que l'on ait une relation du type $g(x,y) = 0$ entre elles.

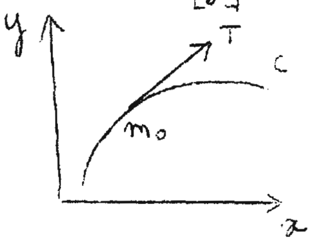
On supposera que f et g soht deux fonctions dérivables.

Il faut trouver un point $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}$ tel que $g(x_o\ y_o) = 0$ et tel que Z soit extrêmum (minimum ou maximum)

$dZ_o = df(x_o y_o)$ doit être nulle pour toute variation $(dx,\ dy)$ compatible avec la condition $g(x\ y) = 0$

De plus : Si $g(x_o y_o) = 0$ et $g(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y) = 0$ on a :

$g'_x(x_o y_o)dx + g'_y(x_o y_o)dy = 0$, cette condition exprimant que $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$ est un vecteur porté par la tangente T à la courbe (c) représentative des points $m \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vérifiant $g(x\ y) = 0$



On a donc les conditions du premier ordre suvantes:

$$\mathrm{I} \begin{cases} Z'_x(x_o y_o)dx + Z'_y(x_o y_o)dy = 0 \\ g'_x(x_o y_o)dx + d'_y(x_o y_o)dy = 0 \\ g(x_o y_o) = 0 \end{cases}$$

On peut dire $\dfrac{Z'_x}{Z'_y} = \dfrac{g'_x}{g'_y} = -\dfrac{dy}{dx} = \text{cte}$

ou encore: $\dfrac{Z'_x}{g'_x} = \dfrac{Z'_y}{g'_y} = \lambda$ au point $x_o\ y_o$

le système I est donc équivalant au système II

$$\mathrm{II} \begin{cases} Z'_x(x_o\ y_o) = \lambda\, g'_x(x_o\ y_o) \\ Z'_y(x_o\ y_o) = \lambda\, g'_y(x_o\ y_o) \\ g(x_o\ y_o) = 0 \end{cases}$$

<u>Exemple:</u> Quel est l'extrêmum de $x + y$, x et y étant des nombres réels positifs tel que $xy = 4$?

On aura $\mathrm{I} \begin{cases} dx + dy = 0 \\ y dx + x dy = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$ et $\mathrm{II} \begin{cases} 1 = \lambda x \\ 1 = \lambda y \\ xy = 4 \end{cases}$

ou: $\dfrac{1}{\lambda^2} = 4$ $\quad \lambda = \dfrac{1}{2}$ car λ est positif

D'ou: $x_o = y_o = 2$ ou $m_o = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

V - 5 - Extrêmum d'une fonction de trois variables liées.

Soit $Z = f(x\ y\ t)$ une fonction de trois variables liées x, y, t, c'est-à-dire telles que l'on ait deux relations du type: $g(x\ y\ t) = 0$, $h(x\ y\ t) = 0$ entre elles.

On suppose que f, g et h sont trois fonctions dérivables.

Il faut trouver un point $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ t_o \end{bmatrix}$ tel que $g(x_o y_o t_o) = 0$, $h(x_o y_o t_o) = 0$ et tel que Z soit un extrêmum.

$dZ_o = df(x_o y_o t_o)$ doit être nulle pour toute variation $(dx\ dy\ dt)$ compatible avec les conditions $g(x\ y\ t) = 0$, $h(x\ y\ t) = 0$

De plus si $g(x_o y_o t_o) = 0$ et $g(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y,\ t_o + \Delta t) = 0$ on a:

$$g'_x(x_o y_o t_o)dx + g'_y(x_o y_o t_o)dy + g'_t(x_o y_o t_o)dt = 0$$

$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix}$ est un vecteur porté par le plan tangent P à la surface représentant les points $m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$ qui vérifient: $g(x\ y\ t) = 0$

Egalement si $h(x_o y_o t_o) = 0$ et $h(x_o + \Delta x,\ y_o + \Delta y,\ t_o + \Delta t) = 0$ on a:

$$h'_x(x_o y_o t_o)dx + h'_y(x_o y_o t_o)dy + h'_t(x_o y_o t_o)dt = 0$$

$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix}$ est un vecteur porté par le plan tangent Q à la surface représentant les points $m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$ qui vérifient: $h(x\ y\ t) = 0$

On a donc les conditions du premier ordre suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} Z'_x(x_o y_o t_o)dx + Z'_y(x_o y_o t_o)dy + Z'_t(x_o y_o t_o)dt = 0 \\ g'_x(x_o y_o t_o)dx + g'_y(x_o y_o t_o)dy + g'_t(x_o y_o t_o)dt = 0 \\ h'_x(x_o y_o t_o)dx + h'_y(x_o y_o t_o)dy + h'_t(x_o y_o t_o)dt = 0 \\ g(x_o y_o z_o) = 0 \\ h(x_o y_o z_o) = 0 \end{array}\right.$$

Les trois premières équations forment un système d'équations linéaires en dx, dy, dt. Le système n'admet la solution $dx = dy = dt = 0$ que si la matrice des coéfficients est régulière. Pour qu'il admette des solutions non indentiquement nulles il faut et il suffit que la matrice soit singulière (déterminant nul).

Alors, les vecteurs $\begin{bmatrix} Z'_x \\ Z'_y \\ Z'_t \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} g'_x \\ g'_y \\ g'_t \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} h'_x \\ h'_y \\ h'_t \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendants

et il existe deux constantes λ et μ telles que:

$$\text{II} \quad \begin{cases} Z'_x + \lambda g'_x + \mu h'_x = 0 \\ Z'_y + \lambda g'_y + \mu h'_y = 0 \\ Z'_t + \lambda g'_t + \mu h'_t = 0 \end{cases} \quad \text{au point } x_o \; y_o \; t_o$$

Parmi l'ensemble des points $m = \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}$ réalisant $g(x\ y\ t) = 0$ et $h(x\ y\ t) = 0$, on recherche donc un point $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \\ t_o \end{bmatrix}$ qui réalise sans contraintes la condition du premier ordre de l'extrêmum de la fonction:

$$Z(x\ y\ t) + \lambda g(x\ y\ t) + \mu h(x\ y\ t)$$

C'est-à-dire l'annulation des trois dérivées partielles par rapport à x, y et t (système II).

<u>Exemple</u>: Quel est l'extrêmum de $x^2 - 2xy + 3z$, x, y, z étant liées par

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2y - z &= -3 \end{aligned}$$

Posons: $F(x\ y\ z) = x^2 - 2xy + 3z + \lambda(x + y) + \mu(2y - z)$

D'ou: $\begin{aligned} F'_x &= 2x - 2y + \lambda \\ F'_y &= -2x + \lambda + 2\mu \\ F'_z &= 3 - \mu \end{aligned}$ qui doivent être nulles

D'ou: $\mu = 3 \qquad \lambda = 2y - 2x$

Il vient le système suivant: $\begin{aligned} -4x + 2y &= -6 \\ x + y &= 0 \\ 2y - z &= -3 \end{aligned}$

qui admet les solutions $x = 1 \quad y = -1 \quad z = 1$

<u>V - 6 - Cas général: Multiplicateurs de LAGRANGE</u>

Les variables auxiliaires λ , μ introduites dans l'étude de l'extrêmum d'une fonction de deux ou trois variables liées sont appelés multiplicateurs de LAGRANGE.

Dans le cas de deux variables liées, ces multiplicateurs s'interprètent comme suit:

On doit rechercher $m_o = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}$ tel que $f(x_o y_o)$ soit un extrêmum local et $g(x_o y_o) = 0$

S'il en est ainsi, on sait qu'il existe λ tel que la fonction $S(x\ y) = F(x\ y) + \lambda\ g(x\ y)$ admette un extrêmum local sur la courbe S qui représente $S(x\ y)$

Le point m_o est un extrêmum de $S(x\ y)$ pour toute variation de $(x\ y)$ au voisinage de $(x_o y_o)$

$$S'_x(x_o y_o) = F'_x(x_o y_o) + \lambda g'_x(x_o y_o) = 0$$
$$S'_y(x_o y_o) = F'_y(x_o y_o) + \lambda g'_y(x_o y_o) = 0$$

représentant les conditions d'extrêmum local de S

Cette méthode s'étend sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de variables liées par plusieures conditions.